第 6 节 隐圆问题（★★★）

强化训练

1．（2014・北京卷・★★★）已知圆 $C:(x-3)^2+(y-4)^2=1$ 和两点 $A(-m,0)$，$B(m,0)(m>0)$，若圆 C 上存在点 P，使得 $\angle APB=90^{\circ}$，则 m 的最大值为（　　）

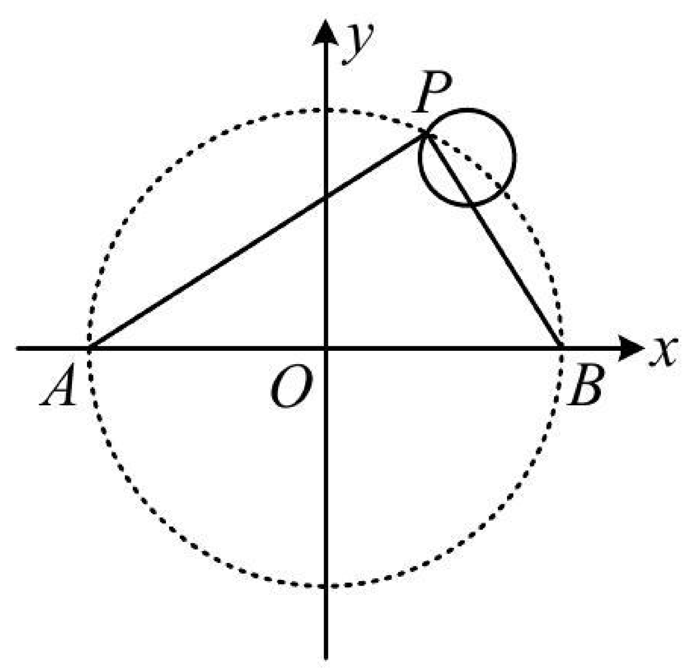
（A）7　（B）6　（C）5　（D）4

答案：B

解析：$\angle APB=90^{\circ}\Rightarrow$ 点 P 在以 AB 为直径的圆上，该圆的圆心为 O，半径为 m，

由题意，圆 C 和圆 O 有公共点，而圆心距 $|OC|=\sqrt{3^2+4^2}=5$，

所以 $|m-1|\le 5\le m+1$，解得：$4\le m\le 6$，故 m 的最大值为 6.



2．（★★★）若圆 $C:x^2+y^2-6x-6y-m=0$ 上有到点 $P(-1,0)$ 的距离为 1 的点，则实数 m 的取值范围是（　　）

（A）$[-18,6]$　（B）$[-2,6]$　（C）$[-2,18]$　（D）$[4,18]$

答案：C

解析：$x^2+y^2-6x-6y-m=0\Rightarrow(x-3)^2+(y-3)^2=18+m\Rightarrow$ 圆心为 $C(3,3)$，半径 $r_1=\sqrt{18+m}(m>-18)$，

到点 P 的距离为 1 的点在圆 $P:(x+1)^2+y^2=1$ 上，故问题等价于圆 C 与该圆有交点，可由此求 m 的范围，

圆 P 的半径 $r_2=1$，圆心距 $|PC|=\sqrt{(-1-3)^2+(0-3)^2}=5$，两圆有交点，所以 $|r_1-r_2|\le|PC|\le r_1+r_2$，

故 $\left|\sqrt{18+m}-1\right|\le 5\le\sqrt{18+m}+1$，此不等式右侧较为简单，先解右侧，

$5\le\sqrt{18+m}+1\Leftrightarrow\sqrt{18+m}\ge 4\Leftrightarrow 18+m\ge 16\Leftrightarrow m\ge -2$，再解左边，此时可判断出 $\sqrt{18+m}-1>0$，

$\left|\sqrt{18+m}-1\right|\le 5\Leftrightarrow\sqrt{18+m}-1\le 5\Leftrightarrow\sqrt{18+m}\le 6\Leftrightarrow 18+m\le 36\Leftrightarrow m\le 18$，所以 $-2\le m\le 18$.

3．（2022・陕西模拟・★★★）阿波罗尼斯（约公元前 262~190 年）证明过这样一个命题：在平面内到两定点的距离之比等于常数 $k(k>0$ 且 $k\ne 1)$ 的点的轨迹是圆，后人将这个圆称为阿氏圆. 若平面内两定点 A 和 B 之间的距离为 2，动点 P 满足 $\dfrac{|PA|}{|PB|}=\sqrt{2}$，则 ΔPAB 的面积的最大值是（　　）

（A）$\sqrt{2}$　（B）2　（C）$2\sqrt{2}$　（D）4

答案：C

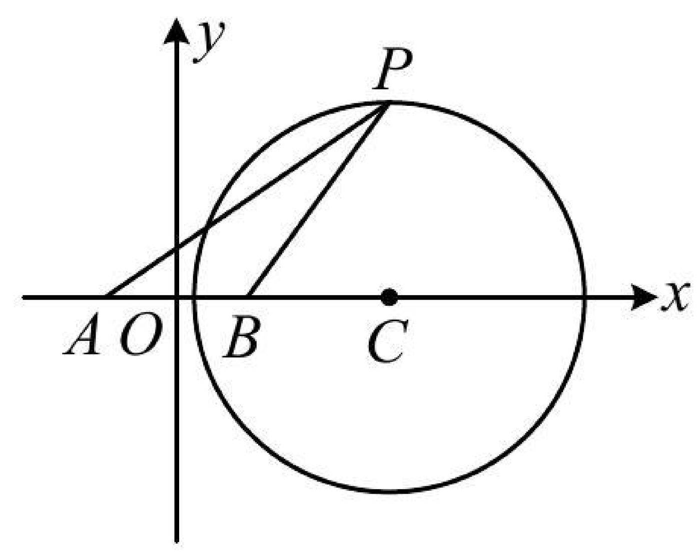
解析：从题干的信息可知点 P 的轨迹是阿氏圆，先建立坐标系，把该圆求出来，

以 AB 中点 O 为原点建立如图所示的平面直角坐标系，则 $A(-1,0)$，$B(1,0)$，

设 $P(x,y)$，因为 $\dfrac{|PA|}{|PB|}=\sqrt{2}$，所以 $\dfrac{\sqrt{(x+1)^2+y^2}}{\sqrt{(x-1)^2+y^2}}=\sqrt{2}$，整理得：$(x-3)^2+y^2=8$，

所以点 P 在以 $C(3,0)$ 为圆心，$2\sqrt{2}$ 为半径的圆上运动，以 AB 为底，则高最大时面积也就最大，

由图可知高的最大值等于圆 C 的半径 $2\sqrt{2}$，故 $(S_{\Delta PAB})_{\max}=\dfrac{1}{2}\times 2\times 2\sqrt{2}=2\sqrt{2}$.



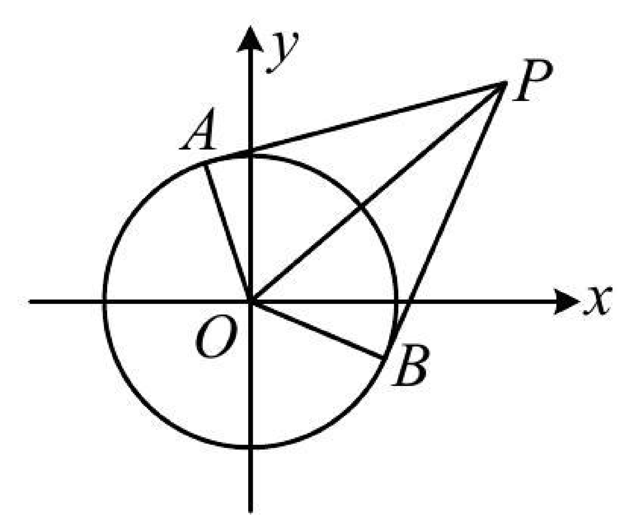
4．（★★★）已知圆 $O:x^2+y^2=1$，圆 $M:(x-a)^2+(y-a+4)^2=1$，若圆 M 上存在点 P，过点 P 作圆 O 的两条切线，切点为 A，B，且 $\angle APB=60^{\circ}$，则 a 的取值范围为_____.

答案：$[2-\dfrac{\sqrt{2}}{2},2+\dfrac{\sqrt{2}}{2}]$

解析：$\angle APB=60^{\circ}$ 怎么翻译？结合圆的半径已知可将 $|OP|$ 求出，这就是定点对定长，故 P 的轨迹为圆，

如图，因为 $\angle APB=60^{\circ}$，所以 $\angle APO=30^{\circ}$，从而 $|OP|=2|OA|=2$，故点 P 在圆 $x^2+y^2=4$ 上，

所以问题等价于圆 $x^2+y^2=4$ 与圆 M 有交点，故 $1\le|OM|=\sqrt{a^2+(a-4)^2}\le 3$，解得：$2-\dfrac{\sqrt{2}}{2}\le a\le 2+\dfrac{\sqrt{2}}{2}$.



5．（2022·河南模拟·★★★★）已知点 $M(0,-a)$，$N(0,a)$，$a>0$，若圆 $C:(x-3)^2+(y+4)^2=9$ 上存在点 P 使得 $\angle MPN$ 为钝角，则 a 的取值范围是_____.

答案：$(2,+\infty)$

解析：钝角这种条件怎么翻译？我们知道直角可翻译成"圆上"，那钝角呢？翻译成"圆内"即可，

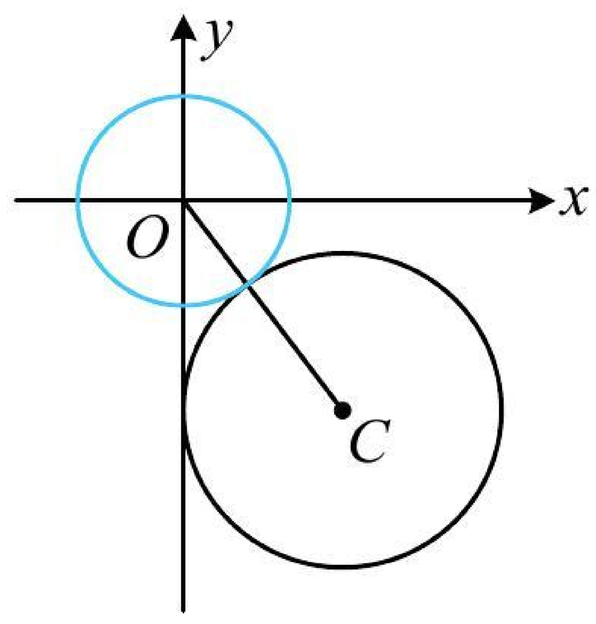
若 $\angle MPN$ 为钝角，则点 P 在以 MN 为直径的圆内，该圆的圆心为原点 O，半径 $r_1=a$，

这样问题就可表述为圆 C 上存在点 P 在上述圆 O 内部，先画图看看，

临界状态如图，两圆外切，因为圆 C 的圆心为 $C(3,-4)$，半径 $r_2=3$，所以 $|OC|=\sqrt{3^2+(-4)^2}=5$，

当两圆外切时，$|OC|=r_1+r_2$，即 $5=a+3$，解得：$a=2$，

由图可知，当 $a>2$ 时，圆 C 上有点在圆 O 内部，故 a 的取值范围是 $(2,+\infty)$.



【反思】对于以 MN 为直径的圆，如图，若 $\angle MP_1N$ 为直角，则点 P_1 在该圆上；若 $\angle MP_2N$ 为锐角，则点 P_2 在该圆外；若 $\angle MP_3N$ 为钝角，则点 P_3 在该圆内.